10.04.14
StPr.

Stochastische Prozesse

Zeitdiskret $\mathbb{R}_0^+ \ni T$ $\qquad T \in \mathbb{N}$

Themen: • Markov-Prozess (M-Prozess) und M-Kette (zeitdiskret)

• Poisson-Prozess (∞e Zustandsmenge) sonst alle endlich

• Geburts- und Todesprozess – (m-von-n-) Reparatursystem (<-> ZR: W-Modell)

Zeit geht gegen ∞

• Grenzverteilungen

• Bewertung

• Modellierung

• Erlangsche Phasenmethode statt ein Zustand mehrere Phasen des Zustands -> statt einer Exp-Verteilung die Summe von Exp.

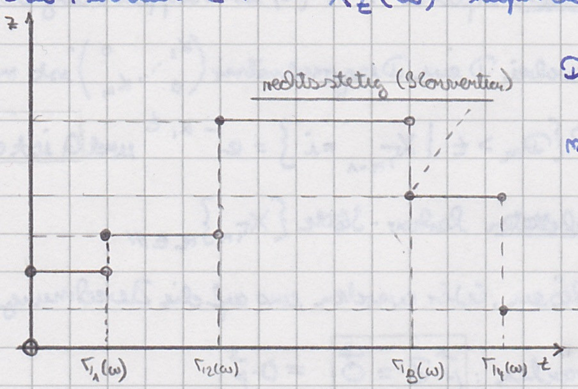
• Erneuerungstheorie

① Grundbegriffe

Menge von Zufallsvariablen; Zufallsmenge; Zielmenge

Def.: stochastischer Prozess $\{X_t : \Omega \to Z \mid t \in T\}$, Indexmenge $T := \mathbb{N}_0$ bzw. $\mathbb{N}$ (zeitdiskret) oder $T := \mathbb{R}_0^+$ (bzw. $\mathbb{R}$) (zeitstetig). • $\{X_t : \Omega \to Z\}$ homogen (ist, wenn) = Übergangswahrscheinlichkeit $p_{ij}(t) := P\{X_{s+t} = j \mid X_s = i\}$ (unter der Bedingung; Zeitpunkt $s+t$) von i nach j innerhalb der Zeit t ist unabhängig von s (≥ 0).

Die Funktion $t \longmapsto X_t(\omega)$ (fest; t abhängiger Pfad) heißt der zum Ausgang $\omega \in \Omega$ (des Zufallsexperiments) gehörige Pfad:



Die Zufallsvariable $T_n : \Omega \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ ($n \in \mathbb{N}$) heißt n-te Ereigniszeit.

Markov-Eigenschaft ("Gedächtnislosigkeit"): $P\{X_{t_n} = i_n \mid X_{t_0} = i_0, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\} =$ (Zustand)

$P\{X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\}$ für alle $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ und alle $i_0, i_1, \ldots, i_n \in Z$

Bsp. aus der Praxis: a) Warteschlange (an einem Bediensystem) (z.B. Klasse); X_t = Anzahl der Wartenden zur Zeit t

b) Lagerhaltung: Vorrat X_t zur Zeit t (inklusive Auffüllung des Vorrats nach bestimmten Kriterien)

Def.: Poisson-Prozess (Anzahl der vorbeiziehenden Fische): Zählprozess, d.h. (monoton steigende Pfade) $X_0 \equiv 0$ und alle Pfade monoton steigend mit Sprüngen der Höhe Eins, für den die Pausenzeiten $D_n := T_n - T_{n-1}$ unabhängig sind und λ-exp. verteilt sind. $P\{D_n > t\} \overset{3.4.2.}{=} e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$ (Intensität des Fischstroms)

Anschauliches Bsp.: Strom, der an einem Angler vorbeiziehenden Fische (Poisson-Strom), verdünnt ($\lambda \leftarrow \lambda_p$ mit $p \in\,]0,1[$ als W.keit dafür, dass ein vorbeiziehender Fisch anbeißt).

Rechenregeln a) $\boxed{P\{X_s = k \mid X_t = m\} = \binom{m}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{m-k}}$ für $0 \le s \le t$, $k, m \in \mathbb{N}_0$ (mit $\binom{m}{k} = 0$ für $k > m$)

Zahlenbeispiel: Wie groß ist die W.keit dafür, dass in der letzten halben Stunde ein Fisch angebissen hat, wenn in den letzten 2 Stunden fünf angebissen haben?

Antwort: $P\{X_1 = 1 \mid X_4 = 5\} = \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4 = 5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3^4}{4^4} = \frac{405}{1024} = 0{,}396 \approx 40\%$

b) $\boxed{P\{\overset{\text{Zuwachs}}{X_t - X_s} = m\} = P\{X_{t-s} = m\} \overset{\text{Poisson}}{\underset{\text{Verteilung}}{=}} \frac{(\lambda(t-s))^m}{m!}e^{-\lambda(t-s)}}$, $0 \le s < t$

Zahlenbeispiel: $\lambda = 5/2$ (pro h) $\Rightarrow$ In der nächsten halben Std. ist die W.keit $P\{X_{0,5} \overset{\text{genau}}{=} 1\} = \frac{5}{2}\cdot 0{,}5\, e^{-\frac{5}{2}\cdot 0{,}5} \approx 35\%$

c) $\boxed{P\{X_{s+t} = m \mid X_s = k\} = P\{X_t = m-k\}, (s,t \ge 0) = \frac{\lambda(t)^{m-k}}{(m-k)!}\cdot e^{-\lambda(t)}}$, $0 \le k \le m$

Ab jetzt nur endliche Zustandsmengen i.d.R. $Z = \mathbb{N}_m \longrightarrow$ Übergangsmatrix $P = (p_{ij}) = (p_{ij}(t))$ $(= P(t))$

Untersuchung von Verteilungen $\vec{p}(t) = (\underset{\ge 0}{p_1(t)}, \dots, \underset{\ge 0}{p_m(t)})$; $\left(\sum_{j=1}^{m} p_j = 1\right) = \vec{p}_0 \cdot P(t)$ zu gegebener Anfangsverteilung $\vec{p}_0$.

Hierbei ist $p_j(t)$ die W.keit dafür, sich zur Zeit t im Zustand j zu befinden ($\to$ Aufenthaltsw.keit)

Eigenschaften von P: a) $P(0) = E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{p}(0) = \vec{p}_0 \cdot E = p_0}$

b) Im zeitdiskreten Fall (d.h. Markov-Kette) setzen wir $Q := P(1)$, so dass $P(n) = Q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \left(P\{X_n = j\}\right)_{j \in \mathbb{N}_1} = \vec{p}_0 \cdot Q^n$

c) Im zeit-stetigen Fall (d.h. Markov-Prozess) erfüllt $P = P(t)$ eine Differentialgleichung: $\boxed{\overset{P(0) = E}{\dot{P} = P \cdot B}}$

mit Intensitätsmatrix $B := D(Q - E)$, wobei D eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \end{pmatrix}$ ist mit unbedingten Intensitäten $\alpha_i \ge 0$ definiert durch $P\{D_n > t \mid X_{T_{n-1}} = i\} = e^{-\alpha_i t}$ und $\boxed{Q \text{ ist die Übergangsmatrix}}$ der in den Markov-Prozess $\{X_t\}_{t \ge 0}$ eingebetteten Markov-Kette $\{X_{T_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$

Bem.: Die DGL ist im Allgemeinen schwierig zu lösen. Wir werden uns auf die Berechnung von Grenzverteilungen $\vec{p} := \lim_{t \to \infty} \vec{p}(t)$ beschränken: $\boxed{\vec{p}B = \vec{0}} = 0 \cdot \vec{p}$

D.h. Gesucht sind die Linkseigenvektoren zum Eigenwert Null

Modellierung eines Markov-Prozesses: Direkte Vorgabe der Intensitätsmatrix B anhand bedingter Intensitäten $0 \le b_{ij}$ mit $i \ne j$ definiert durch $P\{D_n > t \wedge X_{T_n} = j \mid X_{T_{n-1}} = i\} = e^{-b_{ij}t}$. Diese b_{ij} entspringen dem Modell: $0 \underset{\mu_1}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} 1 \underset{\mu_2}{\overset{\lambda_2}{\rightleftarrows}} 2 \cdots (m-1) \underset{\mu_m}{\overset{\lambda_m}{\rightleftarrows}} m$ („Geburts- und Todesprozess")

Hierbei bedeutet $\lambda_j > 0$, dass man mit W.keit $e^{-\lambda_j t}$ mindestens die Zeit t vergeht für den Sprung vom Zustand $j-1$ in den Zustand j. Beispiel: n Komponenten mit Ausfallrate λ; d.h. eine einzelne Komponente ist zur Zeit t mit W.keit $e^{-\lambda t}$ intakt $\Rightarrow$ Gesamtausfallrate $= n \cdot \lambda$

X_t = Anzahl der ausgefallenen Komponenten zur Zeit t; $0 \underset{\mu_1 = \mu > 0}{\overset{\lambda_1 = n\lambda > 0}{\rightleftarrows}} 1 \underset{\mu_2 = 2\mu > 0}{\overset{\lambda_2 = (n-1)\lambda > 0}{\rightleftarrows}} 2 \cdots$ Intensität

Reparaturrate μ eines einzelnen Mechanikers $\Rightarrow k \in \mathbb{N}_0$ Mechaniker besitzen die Reparaturrate $k\mu$

Festlegung: nur ein Mechaniker repariert eine Komponente

10.04.14
SP

Zusammenhang zwischen b_{ij} und λ_j, μ_j: $b_{i,i+1} = \lambda_{i+1}$; $b_{i+1,i} = \mu_{i+1}$ ($i \in \mathbb{N}_n$) alle anderen b_{ij} mit $i \neq j$ sind Null (da keine entsprechenden „Pfeile" im „Intensitätsgraphen"). Insgesamt ist B damit durch die Bedingung festgelegt, dass alle Zeilensummen Null sind.

Prüfung: Welche Eigenschaft hat Matrix bei GBT-Prozess = „tridiagonalität"

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1-\lambda_2 & \lambda_2 & 0 \cdots & \vdots \\ & \mu_2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n & -\lambda_n \end{pmatrix}}$$ „tridiagonal bei Geburts- und Todesprozess!"

24.04.2014 Die Grenzverteilung eines Geburts- und Todesprozesses mit positiven Geburtsraten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und positiven Todesraten $\mu_1, \dots, \mu_k$:

Tolle Tabelle der Stochastik

$$0 \underset{\mu_1}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} 1 \quad \cdots \quad \underset{\mu_k > 0}{\overset{\lambda_k}{\rightleftarrows}} k$$

Für die zugehörige (eindeutig bestimmte) Grenzverteilung $\vec{p} = (p_0, p_1, \dots, p_k)$ gilt dann $\boxed{p_n = \frac{\lambda_n}{\mu_n} p_{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_k$

Zahlenbeispiel: ($k := m := 2$; $n = 4$ eines (k, m, n)-Reparatursystems)

$$0 \underset{\mu}{\overset{4\lambda}{\rightleftarrows}} 1 \underset{2\mu}{\overset{3\lambda}{\rightleftarrows}} 2 \underset{2\mu}{\overset{2\lambda}{\rightleftarrows}} 3 \;\hat{=}\; \text{Systemausfall}$$

Reparieren dauert länger

Gegeben: Quotient: $\lambda / \mu = 1/5 \Rightarrow p_1 \overset{n=1}{=} 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot p_0$

$p_2 \overset{n=2}{=} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot p_1$; $p_3 \overset{n=3}{=} 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot p_2$; $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (da $\vec{p} \hat{=} (p_0, p_1, p_2, p_3)$ eine Verteilung)

$\Rightarrow p_0 + \frac{4}{5} p_0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot p_0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot p_0 = 1 \quad \Rightarrow p_0 = \frac{2 \cdot 5^3}{2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4} = \frac{250}{522} \approx \underline{0{,}479}$

$p_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{125}{261} \approx 0{,}383$; $p_2 \approx 0{,}115$; $p_3 \approx 0{,}023$

Zur Erinnerung: Für die Intensitätsmatrix $B := \begin{pmatrix} -4\lambda & 4\lambda & 0 & 0 \\ \mu & * & 3\lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & * & 2\lambda \\ 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix}$ (mit verschwindenden Zeilensummen $= 0$)

gilt dann $\boxed{\vec{p} \cdot B = \vec{0}}$

Zugehöriges Zahlenbeispiel mit "Bewertung": Reparaturkosten eines Mechanikers betragen 50 € pro h.

Frage: Welche Kostenrate hat dieses $(2, 2, 4)$-Reparatursystem durchschnittlich

Antwort: (mittels „Bewertung" der Grenzverteilung p) $\vec{p} \cdot \vec{r}$ mit „Bewertungsvektor $\vec{r} := (0, 50, 100, 100)$ (€/h)

$\Rightarrow$ Kostenrate $\vec{p} \cdot \vec{r} \approx 50 \cdot \overbrace{0{,}383}^{p_1} + 100 \cdot \overbrace{0{,}115}^{p_2} + 100 \cdot \overbrace{0{,}023}^{p_3} \approx 32{,}95$ €/h

Allgemeines zum Thema Grenzverteilungen

Es geht hier um die Klassifizierung von (eingebetteten) Übergangsmatrizen bzw. von beliebigen stochastischen Matrizen $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ d.h. $q_{ij} \geq 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_n$ und $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 1}_{\text{Zeilensumme Eins (für i-te Zeile)}}$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$

Def.: Eine stochastische Matrix Q heißt einfach, wenn nur eine Grenzverteilung $p \in \mathbb{R}^n$ existiert, d.h. $p_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, $\vec{p} Q = \vec{p}$. (Bsp. siehe oben Geburts und Todesprozess mit $\mu_j > 0$ -> eingebettete Markov-Kette davon). Q heißt asymptotisch, wenn $Q^\infty := \lim_{m \to \infty} Q^m$ gilt (z.B. wenn $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $Q^{m+1} = Q^m Q = Q^m$ ($= \lim_{m \to \infty} Q^m$))

Q heißt positiv (balanciert), wenn Q eine positive Grenzverteilung $(p_1, \dots, p_n)$ besitzt, d.h. $p_j > 0$